

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

**A FÜGGVÉNYFOGALOM KIALAKÍTÁSÁNAK
VIZSGÁLATA**

**INVESTIGATION OF THE FORMATION OF THE
FUNCTION CONCEPT**

Szanyi Gyöngyi

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2017

Kutatásunk központjában egy olyan fogalom kialakításának vizsgálata állt, mely számos tudományterület műveléséhez szükséges fogalom. Matematikatanítás során többször szembesültünk azzal a problémával, hogy az általános vagy a középiskola befejezése előtt álló, sőt, egyetemet kezdett tanulók „elveszettek” a függvények világában. Vajon mi okozza ezt? Gyanú tárgyát képezte, hogy mindennek háttérében a tanulási folyamat azon szakasza áll, amikor a függvény fogalma bevezetésre kerül.

A függvényfogalom bevezetéshez alapos előkészítő munka szükséges. Ennek fókuszában a fogalom egy olyan informális bázisának kiépítését célszerű helyezni, melyre később az új tananyag építhető. Mindez elérhető a függvényfogalom azon forrásainak beépítésével, melyek a fogalom alkotórészeinek a megismertetését is segítik.

Vizsgálva az Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma által megerősített, matematika tanterveket és a magyar nyelvre lefordított tankönyveket, kiderült, hogy az előkészítő munka csekély szerepet kap mind a tankönyvekben, mind a tantervben, ellentétben a magyarországi tantervvel és tankönyvekkel.

Kutatásunk több részből állt. Induktív kutatási stratégiával magyarországi középiskolát befejező, elsőéves egyetemei hallgatók egy csoportjában vizsgáltuk a hallgatól függvényről kialakult képzetait leíró esettanumány segítségével (K1). Ezzel egyidőben egy összehasonlító pedagógiai kutatást keretében longitudinális mérőorozatot kezdtünk, melynek segítségével egy-egy ukrainai és magyarországi iskola egy-egy tanulói csoportjában a függvényfogalom kialakítását vizsgáltuk 3 éven keresztül 6., 7. és 8. osztályokban (K2). Az így szerzett tapasztalatok figyelembe vételével kutatásunkat a függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő programmal folytattuk, melyet egy ukrainai magyar tannyelvű iskola 6. osztályában akciókísérletben valósítottunk meg (K3).

Kutatási kérdések:

- K1.1. Milyen fogalomképzet alakult ki a függvényről a magyarországi középiskolát befejező tanulók egy választott csoportjánál?
- K2.1. Milyen szinten birtokolják a szabálykövető és szabályfelismerő képességeket 6. osztály végén az ukrán és magyar közoktatásban tanuló vizsgált diákok?
- K2.2. Fejlődnek-e célzott fejlesztés nélkül is az ukrainai osztály tanulóinak szabálykövető és szabályfelismerő képességei?

- K2.3. Hatással van-e a függvényfogalom formális bevezetése, különböző reprezentációinak megismerése a szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlődésére az ukrainai csoportban?
- K2.4. Milyen fogalomképzet alakul ki a függvényről 8. osztály végére a vizsgált ukrainai és magyarországi tanulónál az eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett?
- K3.1. Hozzájárul-e a függvényfogalom alkotórészeinek jobb megismeréséhez a függvényfogalom különböző forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) az ukrainai 6. osztályos matematika tananyag egyes témaköreibe történő beépítése?
- K3.2. Hogyan segítik az együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a függvény forrásai és a különböző reprezentációi (verbális, táblázat, képlet, grafikon)?
- K3.3. Fejleszthetők-e a függvény alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével a 6. osztályos ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei?

Hipotézisek:

- H1.1. A középiskolát befejező tanulói csoport függvényfogalomról kialakult képzei nem felelnek meg a kerettantervi követelményeknek.
- H2.1. A vizsgált 6. osztályos ukrainai tanulók alacsonyabb szinten birtokolják a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgált 6. osztályos magyarországi tanulók.
- H2.2. Az ukrainai tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességei fejlődnek a vizsgált időszakban.
- H2.3. A függvény fogalmának bevezetése hatással van a szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlődésére.
- H2.4. Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulónál 8. osztály végére „ideálisabb” fogalomképzet alakul ki a függvényről (azaz a képzet kölcsönös kapcsolatban van annak definíciójával), mint a vizsgált ukrainai tanulónál.
- H3.1. A függvényfogalom forrásainak a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez.

- H3.2. Az együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítását a források mellett ebben az életkorban jól szolgálja függvény különböző reprezentációinak megismerése is.
- H3.3. A függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével fejlődnek a szabálykövető és szabályfelismerő képességek is.

Az **1. fejezetben** a kutatás elméleti hátterét ismertettük.

Skemp (2005) két, fogalomalkotásra vonatkozó alapelve szerint a matematikai fogalomalkotásban a definícióknak meghatározott helyük van. A definíció bevezetésének egészen addig nincs értelme, míg a tanuló nem rendelkezik a megfelelő matematikai kultúrával. Varga Tamás szerint (1969) absztrahálni csak konkrétumokból lehet. Ezért a fogalom bevezetését célszerű a Bruner-féle reprezentációs síkok közül (materiális ikonikus, szimbolikus) (Bruner, 1966) a materiális (enaktív) síkon kezdeni, minél több olyan tárgyi tevékenységet használva, melyek személyes élménnyé válva az epizodikus emlékezetben tárolódnak. Ez olyan emlékek „tárháza”, amelyek az ismeretek elsajátításának kontextusát (személyes aspektusait) is megőrzik (Csépe, Győry, Ragó, 2007).

A fogalom megértéséhez azonban nem csupán a fogalom definíciójára van szükség, hanem az arról kialakult fogalomképzetre is. Legtöbbször ezt használják a tanulók annak eldöntésére, hogy egy objektum példája vagy ellenpéldája a fogalomnak. Ennélfogva a fogalom kialakítása során fontos, hogy a tanulóknál olyan fogalomképzet alakuljon ki, mely kölcsönös kapcsolatban van annak formális definíciójával.

A függvényfogalom didaktikai elemzése rámutatott arra, hogyan építhető ki a definíció bevezetéséhez szükséges matematikai kultúra. Történeti fejlődését elemezve kirajzolódtak a fogalom alkotórészei (változók, kapcsolatok, szabályok), melyek a megértéséhez szükséges előzetes ismereteket is magukban hordozzák (Sierpinska, 1992). A fogalom kialakítási folyamatában fontos a változás érzékelése, a változók közötti kapcsolat felismerése. A változás „milyenségét” pedig a változók közötti kapcsolatot leíró szabály tudja meghatározni.

A legtöbb matematikai fogalom iskolai alakítási folyamata követi annak történeti fejlődését. A függvényfogalom esetében is ez a helyzet. Kleiner (1989) három mentális képet használ a függvény történeti fejlődésének leírásához:

- geometriai (Leibniz 1692-ben a függvényt görbéhez kapcsolódó mértani objektumok jelölésére használta).
- algebrai (Bernulli és Euler a függvényt, mint analitikus kifejezést definiálták, mely változók és állandók közötti kapcsolatot leíró képlet).
- logikai (Dirichlet és előtte Bolyai Farkas adta meg a ma használatos függvényfogalmat).

A függvény iskolai előkészítéséhez a „szűkebb” függvényfogalmat használjuk, azaz a szabályokkal leírható kapcsolatok kerülnek először tárgyalásra. Ebből bontakozik ki később a ma használatos, „tágabb” függvényfogalom (itt már nincs jelentősége annak, hogyan jött létre a kapcsolat).

A didaktikai elemzéssel igyekeztünk megtalálni a függvényfogalom előkészítését segítő forrásokat (*cognitive roots*), kapcsolatba hozva őket a fogalom megértésének egyik kritériumával, a különböző reprezentációk használatának képességével.

A szakirodalmak analizisével a következő megállapítások tehetők a függvényfogalom kialakítására:

- Az előkészítési szakasz fókuszába a fogalom egyes alkotórészeinek megismerését kell helyezni.
- Az alkotórészek megismertetését és az együvváltozó mennyiségek fogalmának tárgyiasítását elérhetjük a fogalom különböző forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) bevonásával.
- Az együvváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésében a függvény különböző reprezentációi nyújthatnak segítséget (verbális, táblázat, képlet, nyíldiagram, grafikon).
- Mindezekkel együtt a mennyiségek közötti felismert kapcsolatot leíró szabályhoz, kapcsolható szabálykövető és szabályfelismerő képességek fejlesztését is szem előtt kell tartanunk.
- Fejlesztenünk kell a különböző reprezentációk közötti átjárás képességét is, mely a fogalom mélyebb megértését segíti.

A dolgozat **2. fejezetében** ukrainai és magyarországi 5-6. osztályos, 2012-ben kiadott matematika kerettantervek és tankönyvek általános, majd a függvényfogalom kialakítása szempontjából végzett elemzésével foglalkoztunk. Arra törekedtünk, hogy megtaláljuk milyen hasonlóságok,

esetleg különbségek mutatkoznak a fogalom előkészítési szakaszában. Továbbá azok mennyire vannak összhangban a tankönyvi leckékkel és az azokban kitűzött feladatokkal. A tankönyvek közül azokat elemeztük, melyeket a kutatásunkban résztvevő tanulói csoportok használtak.

Vizsgálataink arra a megállapításra jutattak, hogy az ukrainai kerettanterv és tankönyvek kevesebb hangsúlyt fektetnek e fogalom előkészítésére, mint a magyarországi tanterv és tankönyvek. A magyarországi tankönyvekben és tantervekben sokkal inkább megjelennek az elméletben tárgyalt alkotórészek (változók, kapcsolatok, szabályok) és a hozzájuk kapcsolódó szabályfelismerő és –követő képességek fejlesztése is hangsúlyos.

A 3. fejezetben magyarországi középiskolát befejező, elsőéves egyetemi hallgatók függvényről kialakult fogalomképzetét vizsgáltuk leíró esettanulmány segítségével. A hipotézis igazolásához vagy elvetéséhez készség- és tudásszintmérő tesztet használtunk, melyet kvantitatív módszerekkel értékeltünk, a hallgatók munkájának kvalitatív elemzésével kiegészítve. A vizsgálatokat Vinner és Dreyfus (1989) kutatásai alapján végeztük a Debreceni Egyetem villamosmérnök hallgatói körében.

A KI.1. kutatási kérdéshez kapcsolódó HI.1. hipotézis áttekintése:

A vizsgált hallgatók többségének a függvényről kialakult fogalomképzetében ismert, egy hozzárendelési szabállyal definiálható függvények voltak jelen, a fogalom tartalmi jelentése hiányzott. A hallgatók többsége abban az esetben tekintett egy görbét valamely függvény grafikonjának, ha hasonlóságot vélt felfedezni az általa jól ismert függvénygörbékkel. A célzott, elemi iskolától kezdődő fogalom előkészítő munka ellenére a vizsgált hallgatóknál a fogalomalkotási folyamat valamely szakaszban „megtört”. Annak ellenére, hogy a magyarországi tanterv, illetve tankönyv már 7. osztályban megismerteti a tanulókat a „tágabb” függvényfogalommal, a vizsgált hallgatók fogalomképzetei egy „szűk” függvényfogalmat mutattak. Ezért a *HI.1.* igazolódott. Míthogy kis létszámú hallgatói csoportot vizsgáltunk, nem volt célunk az eredmények általánosítása. A tapasztalatok azonban olyan további kutatás megtervezését segítették, mely megpróbálta beazonosítani, hogy melyik az a korosztály, amelynél már hasonló fogalomképzettel rendelkeznek a tanulók.

A **4. fejezetben** egy ukrainai magyar tannyelvű és egy magyarországi iskola egy-egy tanulói csoportjában 3 éven keresztül végzett, a függvényfogalom kialakulását vizsgáló összehasonlító pedagógiai kutatást mutattunk be. A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez készség szintmérő teszteket használtunk, melyek értékelését kvantitatívan végeztük, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével.

A vizsgált magyarországi tanulónál a fogalomkialakítás célzottan történt, ellentétben a vizsgált ukrainai tanulókkal. Ezek ismeretében először általános iskola 6. osztályában (2014) vizsgáltuk a tanulók szabályfelismerő és szabálykövető képességeinek szintjét a függvényfogalom bevezetése előtt. A felmérés során szerzett tapasztalatok figyelembe vételével ezt 7. osztályban (2015), a függvényfogalom definíciójának bevezetése után, egy újabb felmérés követte, melynek középpontjában a fogalom megismerésének ezen képességekre gyakorolt hatása állt. Végül a tanulók függvényfogalomról alkotott képzeiteinek feltérképezését céloztuk meg 8. osztály végén (2016).

A K2. kutatási kérdésekhez kapcsolódó H2. hipotézisek áttekintése:

Megfelelő fejlesztési követelmények hiányában a vizsgált 6. osztályos ukrainai (UA) tanulók alacsonyabb szinten birtokolták a szabályfelismerő és szabálykövető képességeket, mint a vizsgálatokban résztvevő magyarországi (HU) tanulócsoport. Tehát az eredmények igazolták a *H2.1.-t*. A vizsgált UA tanulók képesek voltak ugyan kapcsolatot felismerni a különböző módon reprezentált együtváltozó mennyiségek között és követni azt, de a kapcsolatot meghatározó szabály melletti érvelés verbálisan vagy képlettel már nehézségekbe ütközött.

A különböző kontextusba rejtett (táblázat, szöveg, grafikon) egy lépéses szabályfelismerés vagy az explicite adott szabály értelmezése és követése terén fejlődtek a vizsgált UA tanulók szabályfelismerő és –követő képességei a vizsgált időszakban (2014-2015). Bár kis arányban, de a táblázattal reprezentált többlépéses szabályfelismerésben is mutatkozott fejlődés (a *H2.2.-t* elfogadtuk).

Noha hatással volt a fogalom bevezetése a különböző módon reprezentált együtváltozó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, az ezt meghatározó szabály leírására és követésére (a *H2.3.* igazolódott), az UA tanulók teljesítménye még alatta maradt a HU tanulóknak. Több UA

tanulónak nehézséget jelentett a felismert kapcsolat szavakkal és/vagy képlettel történő megadása.

A 6. és 7. osztályos vizsgálatok eredményei alapján elmondható, hogy a célzott előkészítő munka erősítette a HU tanulók helyes függvénysémájának alakulását, a spontán fejlődés mellett. A 7. osztályban bevezetésre kerülő függvény fogalmát a HU tanulók esetében erősebb alapokra lehetett építeni.

A 8. osztály végén elvégzett felmérés eredményei azt mutatták, hogy az eltérő fogalomkialakítási folyamat ellenére, a függvény definíciójának megadása után, a különböző specifikus függvények bevezetésének hatására mindkét tanulói csoport fogalomképzetében, hasonlóan a vizsgált egyetemi hallgatókhoz, még a „szűk” függvényfogalom élt. Tehát annak ellenére, hogy a vizsgált ukrainai kerettantervekben és tankönyvekben kevésbé hangsúlyos a függvényfogalom előkészítése, 8. osztály végén mindkét csoport tanulói hasonló fogalomképzettel rendelkeztek.

Tehát a K2.4. kutatási kérdés vonatkozásában a következőt állíthatjuk:

Eltérő fogalomkialakítási folyamat mellett a vizsgált magyarországi tanulóknál 8. osztály végére nem alakul ki „ideálisabb” fogalomképzet a függvényről, mint a felméréssorozatunkban résztvevő ukrainai tanulóknál.

Az **5. fejezetben** a függvényfogalom előkészítését megcélzó fejlesztő programot és annak tapasztalatait mutattuk be. Ezt az ukrainai magyar tannyelvű Nagydobronyi Középiskola 6. osztályában valósítottunk meg 2015-2016-ban akciókísérlet segítségével, figyelembe véve az összehasonlító pedagógiai kutatás ismérveit. A hipotézisek igazolásához vagy elvetéséhez tájékozódó felmérést, két utótesztet és egy késleltetett tesztet használtunk, melyek értékelését kvantitatívan végeztük, a tanulók munkájának kvalitatív elemzésével. Mindezeket az egyes foglalkozásokon megfigyelésekkel (írásos feljegyzések, hangfelvételek, fényképek, a foglalkozásokon használt tanulói „Móka” füzet) szerzett tapasztalatokkal egészítettünk ki.

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a 11 foglalkozásból álló fejlesztő programot.

	Fejlesztő stratégia, módszer	Rövid tartalmi leírás
Tájékozódó felmérés (2015. november 17.)		
Fejlesztő program 1. része (2015. november 23 - december 7.) Tanterv szerinti témakör: Arány, aránypár (a foglalkozások a tanórák csak egy részét töltötték ki)		
1.	Elemző képesség, relációs szókincs fejlesztése	Elempárok alkotása manuális tevékenységekkel
2.	Együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítása, kapcsolatfelismerő képesség fejlesztése és különböző módon való lejegyzése	Együttváltozó mennyiségek fogalmának bevezetése függvénygép alkalmazásával
3.	Szabálykövető képesség, reprezentációs formák közötti átjárás képességének fejlesztése	Kifejezések helyettesítési értékeinek meghatározása
4-5.	Együttváltozó mennyiségek, a közöttük lévő kapcsolat felismerésének fejlesztése	Szöveges feladatokban rejtőző együttváltozó mennyiségek felismerése, reprezentálása táblázattal, képlettel
6.	„Kétirányú” gondolkodás fejlesztése	Szituációk és azok általános megoldását leíró algebrai kifejezések összekapcsolása
Utóteszt (2016. január 19.)		
Fejlesztő program 2. része (2016. április 25. – május 4.) Tanterv szerinti témakör: Grafikonok (a foglalkozások a teljes tanórát kitöltötték)		
7.	Megfigyelőképesség fejlesztése, eligazodás a mindennapi élet grafikonjain	Grafikonok bevezetése. Adatok leolvasása a grafikonról
8.	Együttváltozó mennyiségek jegyzése. Reprezentációk közötti átjárás képességének fejlesztése	Szituációhoz előre elkészített táblázat alapján grafikon szerkesztése, grafikon alapján táblázat kitöltése
9.	Kapcsolat felismerő képesség fejlesztése és reprezentálása játékos eszközökkel	Szituációk eljátszása az együttváltozó mennyiségek táblázatos és grafikus

		ábrázolásának előkészítéséhez
10.	Tapasztalati függvények alkotása, azok reprezentálása és összekapcsolása a szituációval	Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (diszkrét eset)
11.	Tapasztalati függvények alkotása, azok reprezentálása és összekapcsolása a szituációval	Valós életből vett szituációk különböző reprezentálása (folytonos eset)
Utóteszt (2016. május 11.)		
Késleltetett teszt (2016. május 23.)		

Táblázat: A függvényfogalom előkészítését célzó fejlesztő program

A fejlesztő program tapasztalatai a tanulók foglalkozásokon végzett munkájának megfigyelése, az utótesztek és a késleltetett teszt alapján (figyelembe véve a 4. fejezetben leírt, 6. osztályos UA és HU tanulók eredményeit is):

- Az alkotórészek megismerését a fogalom forrásai (függvénygép, valós életből vett folyamat) jól szolgálták.
- Néhány tanulónak azonban a „gép” egyszeri bemutatása még nem volt elegendő ahhoz, hogy az adott modelltől más szituációkban el tudjanak vonatkoztatni. Számukra több ilyen tevékenység kipróbálása szükséges, amit a „gép” ún. „szabálykapcsolóval” való ellátásával érhetünk el. Ezzel a szabályok világának a mélyebb megértését is megcélozhatjuk.
- A szabály inverzének alkalmazása abban az esetben, ha az nem explicite adott, néhány tanulónál még nehézséget jelentett.
- A különböző kontextusba ágyazott együttváltozó mennyiségek fogalmának alakítása és/vagy azok közötti kapcsolat felismerése a különböző függvényreprezentációk megismerésének köszönhetően sikeres volt.
- Fejlődött a felismert kapcsolat melletti szavakkal történő érvelés is.
- Fejlődött az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés képessége.
- Abban az esetben, ha több független változónak ugyanaz a függő változó felelt meg (több-egyértelmű leképezés) a táblázattal reprezentált együttváltozó mennyiségeket nyildiagramon vagy grafikonon reprezentálni a tanulók felének még nem sikerült.

- A különböző kontextusban rejtőző együttváltozó mennyiségek közötti kapcsolatfelismerő képesség abban az esetben, ha a kapcsolatot egylépéses szabály definiálta, a foglalkozások segítségével fejlődött.
- A célzott 6. osztályos fejlesztés már jól közelítette a 2014-es felmérésben résztvevő 6. osztályos HU tanulók eredményeit, akinél a fogalom előkészítő munka elemi iskola 1. osztályától történt.

A K3. kutatási kérdésekhez kapcsolódó H3. hipotézisek áttekintése:

Az alkotórészek megismerését ezen források jól szolgálták, de néhány tanulónak más szituációban nem sikerült elvonatkoztatni a foglalkozáson szerzett tapasztalatoktól. Tehát a *H3.1.* a következő módosítással válik igazzá: *A függvényfogalom forrásainak (függvénygép, valós életből vett folyamat) a 6. osztályos tananyagba történő beépítése hozzájárul a függvényfogalom alkotórészeinek megismeréséhez, de a gyengébb képességű tanulók több foglalkozást igényelnek.*

A különböző kontextusba ágyazott együttváltozó mennyiségek alakítását a kipróbált tevékenységek segítették. Az együttváltozó mennyiségek reprezentációi segítséget nyújtottak abban, hogy azokat megnevezzék, a közöttük lévő kapcsolatot felismerjék, valamint áttérjenek egyik reprezentációs módról a másikra (*H3.2.* igazolódott). A felismert kapcsolat táblázattal történő reprezentálása hozzájárult annak a matematika nyelven való megfogalmazásához, ha ezt a kapcsolatot egylépéses szabály definiálta.

A szöveges kontextusban meghúzódó együttváltozó mennyiségek és az azok közötti kapcsolat felismerése, annak a matematika nyelven történő megadása, ha ez a kapcsolat kétlépéses szabállyal definiálható és/vagy a mennyiségek implicite rejtőztek a szövegben, még nehéznek bizonyult.

Így a *K3.3.* kutatási kérdés vonatkozásában a következőt állíthatjuk:

A függvényfogalom alkotórészeinek és különböző reprezentációinak 6. osztályban történő megismertetésével a különböző kontextusban rejtőző egylépéses szabállyal definiálható kapcsolat felismerése néhány foglalkozással fejleszthető.

Viszont a legalább kétlépéses szabállyal definiálható kapcsolatok felismerése és követése hosszabb, folyamatosabb fejlesztést megcélzó foglalkozásokat igényel.

A dolgozat zárásaként összefoglaltuk kutatásunk legfontosabb eredményeit, tapasztalatait, majd felvázoltunk néhány további kutatási lehetőséget:

- Több magyarországi és ukrainai iskola tanulói csoportjában a függvényfogalom kialakítási folyamatának, s ezzel együtt a fogalomképzet alakulásának vizsgálata további évfolyamokon.
- A bemutatott kísérleti tanítás kipróbálása több ukrainai iskola tanulócsoportjában a már megszerzett tapasztalatok figyelembe vételével tett módosításokkal.
- A kísérleti tanítás folytatása a függvényfogalom 7. osztályban történő bevezetését célzó foglalkozásokkal, majd további alakítását segítő foglalkozások kidolgozása és kipróbálása mind magyarországi, mind ukrainai iskolákban.
- A kísérleti tanításokban résztvevő tanulók fogalomkialakulási folyamatának összehasonlítása más tanulói csoportokéval.

The focus of our study was the investigation of the formation of a concept which is a fundamental concept in several disciplines. While teaching Mathematics, we have frequently faced the problem that students before graduation from elementary or secondary schools and even first year university students are lost in the world of functions. What could be the reason of it? One of our initial suspicions was that an important learning period stands behind this problem, particularly, when the concept of function is introduced.

A meticulous preparation is needed before introducing the concept of function. An informal basis of the concept should be built as the focus of this process on which the new material can be built later. It can be carried out by introducing the sources of the function concept which help to familiarize the students with the constitutive parts of the concept.

While studying the Mathematics curricula and the Hungarian translations of the textbooks, which are approved by the Ministry of Education and Science of Ukraine, it turned out that the preparation work plays very little role both in the curricula and the textbooks, as opposed to the curricula and textbooks used in Hungary.

Our research comprised of several parts. Using an inductive research approach we studied the concept image of function among first year university students who had just finished the secondary school (K1). In parallel, we run a contrastive pedagogical research in a longitudinal design when over a period of 3 years we observed the formation of the function concept in a group of students in Ukraine and in Hungary (in the 6th, 7th and 8th form) (K2). Based on the results and experiences, we continued our research with an improvement program for preparing the function concept. The program was used in the 6th form of a Hungarian school in Ukraine (K3) with action research.

Research questions:

- K1.1. What kind of concept image of function has formed in a chosen group of secondary school graduates in Hungary?
- K2.1. To what extent do the investigated students possess the rule following and the rule recognition skills by the end of the 6th form in Ukraine and in Hungary?
- K2.2. Do the rule following and the rule recognition skills of the students in Ukraine improve without targeted improvement?

- K2.3. Does the formal introduction of the function concept and the different representations have any effect on the development of the rule following and the rule recognition skills in the Ukrainian group?
- K2.4. What kind of concept image of function develops by the end of the 8th form in the investigated students from Hungary and Ukraine as a result of the different concept formation process?
- K3.1. Does the introduction of the sources of the function concept (function machine, processes taken from real life) to the topics of Mathematics contribute to the better understanding of the constitutive parts of the function concept?
- K3.2. How do the sources and the different representations of the function (verbal, table, formula, graph) facilitate the formation of the concept of covariant quantities?
- K3.3. Is it possible to improve the rule following and rule recognition skills of the 6th form students by introducing the constitutive parts and representations of the function in the 6th form?

Hypothesis:

- H1.1. The concept image of function of secondary school graduates do not meet the requirements of the curricula.
- H2.1. The investigated 6th form students in the Ukrainian school have lower rule following and rule recognition skills than 6th form students in Hungary.
- H2.2. The rule following and rule recognition skills of the Ukrainian students improve in the studied period.
- H2.3. The introduction of the function concept has an effect on the improvement on the rule following and rule recognition skills.
- H2.4. The investigated students in the Hungarian schools develop a more ideal concept image of function (so the concept image has a mutual relationship with the concept definition) by the end of the 8th form compared to their peers in Ukraine.
- H3.1. The introduction of the sources of the function concept in the 6th form contributes to the better familiarization of the constitutive parts of the function concept.
- H3.2. The formation of the concept of covariant quantities is well facilitated by the familiarization of the different representations of the function.

H3.3. The introduction of the constitutive parts and representations of the function concept in the 6th form contribute to the improvement of the rule following and rule recognition skills.

In **Chapter 1** we presented the theoretical background of the research.

According to two principles of Skemp (2005), definitions have defined positions in mathematical concept formation. The introduction of the definition makes no sense until the student has sufficient mathematical culture. Tamás Varga (1969) claims that abstraction can be realized only from concrete things. Thus, the introduction of the concept should be started on the material (enactive) stage – from among Bruner’s stages of representation (material, iconic, symbolic) (Bruner, 1966) – using as many activities with objects as possible to make them a personal experiences which are then stored in the episodic memory. This memory store also preserves the context of knowledge acquisition (Csépe, Györy, Ragó, 2007). However, understanding the concept doesn’t only mean the ability to define the concept but the concept image is also necessary. In most cases students use this to decide whether an object is an example or a nonexample of a concept. Thus, in the process of concept formation it is crucial that the students develop a concept image which is in a mutual relationship with its formal definition.

The didactic analyses of the function concept pointed out how could the sufficient mathematical culture be developed, which is necessary for the introduction of the definition. Analysing the historical development, the constitutive parts of the concept were drawn up (variables, relationships, rules), which carry the previous knowledge necessary for its understanding (Sierpinska, 1992). The detection of change and the recognition of the relations between variables is important in the concept formation process. The “quality” of change can be determined by the rules describing the relationship between the variables.

Most concept formation processes in the school follow their historical development. It is the case with the function concept too. Kleiner (1989) uses three mental pictures to describe the historical development of function:

- geometric (Leibniz in 1692 used the function to denote any quantity connected with a curve).
- algebraic (Bernulli and Euler defined the function as an analytic expression, which is a formula describing the relationship between constants and variables).

- logic (Dirichlet and before him Farkas Bolyai developed the function concept used today).

We use the „narrow” function concept to prepare the introduction of function at school, that is, relations that can be described by rules are discussed first. The „broader” function concept emerges from this (it is not important anymore how the relation evolved).

With the didactic analyses we tried to find the sources (*cognitive roots*) which facilitate the preparation of the function concept and connected them with other criteria of understanding the concept, like the ability to use the different representations.

Based on the literature review about the formation of the function concept we can claim the following:

- The constitutive parts of the concept should be placed in the focus of the preparation phase.
- The introduction of the constitutive parts and the reification of the the concept of covariant quantities can be carried out by the involvement of the sources of the concept (function machine, process taken from real life).
- The different representation of the function (verbal, table, formula, arrow diagram, graph) can facilitate the recognition of the relationship between covariant quantities.
- We also have to keep in mind the improvement of the rule following and rule recognition skills which can be connected to the rule which describes the recognised relationship between the quantities.
- The skill of switching between different representations should also be improved, which help the deeper understanding of the concept.

In **Chapter 2** we analysed the Ukrainian and Hungarian Mathematics curricula and textbooks - issued for the 5th-6th forms in 2012 - from a general point of view and from the point of the function concept formation. Our goal was to find out if there were any similarities or differences in the preparation phase of the concept. Furthermore, we were interested in to what extent these phases are in harmony with the tasks in the textbooks and the aims of the textbooks. We analysed the textbooks which were used in the target groups of our research.

Based on our analyses we arrived at the conclusion that the Ukrainian curricula and textbooks put less emphasis on the preparation of the concept than the Hungarian curricula and textbooks. In the Hungarian textbooks and curricula the constitutive parts of the function concept which were discussed in the theoretical part (variables, relationships, rules) are more present and the improvement of the rule recognition and rule following skills are more stressed.

In **Chapter 3** we studied the concept image of function among first year university students who had just finished the secondary school in Hungary. In order to confirm or reject the hypotheses, we used a skill proficiency test which was analysed with quantitative methods complemented with a qualitative analyses of the students' work. The study was carried out following Vinner and Dreyfus (1989) among electric engineer students of the University of Debrecen.

An overview of H1.1. hypothesis:

In most students concept image of function there were functions which can be defined by an assignment rule, but the content and the meaning of the concept was missing. Most students considered a curve for a graph of a function, if they recognised similarities with the already known function curves. Regardless of the targeted preparation work that starts from the beginning of the elementary school, the concept formation process in this group of students "broke" at some point. Despite the fact that the Hungarian curriculum and textbook introduces the "broader" function concept in the 7th form already, the concept images of the students reflected the "narrow" function concept. This confirms *H1.1*. As we studied only a small group of students, we did not aim to generalize from the results. However, our experiences motivated us to design a research which helps to identify the age group in which students possess a similar concept image.

In **Chapter 4** we reported on the results of a 3 years long contrastive pedagogical longitudinal research on the formation of the function concept. We studied two groups of primary school students: one from a Hungarian school in Ukraine, and the other from Hungary. In order to confirm or reject the hypothesis, we used a skill proficiency test which was analysed with quantitative methods complemented with qualitative analyses of the students' work.

The concept formation happens in a targeted form in the case of students from Hungary, while in the case of students from Ukraine it's different. Knowing these, we first tested the level of rule following and rule recognition skills in the 6th form (2014), before the introduction of the function concept. Based on the experiences of the first measurement, we assessed the students again in the 7th form (2015), after the introduction of the definition of the function concept. In the second test we focused on the effects of the knowledge of the concept on the skills. Finally, we tried to map the concept image of function among the students at the end of the 8th form (2016).

An overview of H2. hypothesis:

Due to the insufficient development requirements 6th form students in Ukraine (UA) possessed the rule recognition and the rule following skills on a lower level than their peers in the other group in Hungary (HU). So, the results confirmed *H2.1*. The UA students were able to recognise and to follow the relationship between the covariant quantities which were represented in different ways, but the argumentation verbally or with formulas for the rule that defines this relationship were limited and caused some problems for them.

The rule following and rule recognition skills of the UA students improved in the studied period (2014-2015) in the areas of one-step rule recognition hidden in different contexts (table, verbal, graph) or the interpretation and following of explicit rules. Although in small proportions, but some improvement was detectable in the multi-step rule recognition represented with table (*H2.2. accepted*).

Although, the introduction of the function concept had an impact on the recognition of the relationship between the covariant quantities represented in different ways and on the description and following of the rule which determines it (*H2.3. confirmed*), the performance of the UA students was behind the HU students. It was difficult for many UA students to describe the recognised relationship with words or formula.

Based on the results of these analyses we can claim that, besides the spontaneous development, the targeted preparation work strengthened the formation of the right function schema in the HU students. The concept of

the function, which was introduced in the 7th form, could be built on stronger fundamentals in the HU group.

The results of the research at the end of the 8th form showed that, regardless of the different concept formation processes, after the introduction of the definition of the function and several specific functions, the same “narrow” function concept was present in both groups as in the group of university students. So, despite the less emphasis on the preparation of the function concept in the Ukrainian curricula and textbooks, by the end of the 8th form both groups have similar concept image.

Regarding K2.4. we can claim the following:

The Hungarian students couldn't form a more ideal concept image of function by the end of the 8th form than the Ukrainian participants, although the concept formation process was different.

In **Chapter 5** we reported on the experiences of the improvement program targeted on the preparation of the function concept. This was done as an action research in the 6th form of the Secondary School of Nagydobrony (elementary, primary and secondary school) in the academic year of 2015-2016 considering the criteria of contrastive pedagogical research. In order to confirm or reject the hypotheses, we used a post-test and a delayed test which was analysed quantitatively and completed with the qualitative analyses of the students. In addition, we made observation during the classes (written notes, audio recordings, pictures, the “Móka” workbook).

In the following table we summarized the improvement program of 11 occasions.

	Improvement strategy, method	Brief content description
An exploratory study (17 November 2015)		
1st part of the improvement program (23 November – 7 December 2015) Topic in the curriculum: Ratio, ratio pair (the sessions covered only part of the lessons)		
1.	Analysing skills, relational vocabulary improvement	Creating element pairs with manual activities
2.	Formation of the concept of covariant quantities, improvement of relationship recognition skills and recording them in different ways	The introduction of covariant quantities with the use of function machine
3.	Improvement of the rule following skill, and of the switching between different representation forms	Defining the substitution value of expressions
4.-5.	Improvement of the recognition of the covariant quantities and the relationship between them	Recognising covariant quantities hidden in textual tasks and representing them with tables, formulas
6.	Improvement of “two-directional” thinking	Connecting situations and algebraic expressions which describe their solutions
Post-test (19 January 2016)		
2nd part of the improvement program (25 April – 4 May 2016) Topic in the curriculum: Graphs (sessions covered the whole lesson)		
7.	Improvement of observation skills, understanding everyday graphs	Introducing graphs. Reading data from graphs
8.	Recording covariant quantities. Improvement of the switching skill between representations	Creating a graph based on a prepared table and filling in a table based on a graph
9.	Improvement of the recognition skill with playful methods	Acting out situations to prepare the table and graph

		representation of covariant quantities
10.	Creating experimental functions, representing them and connecting them with different situations	Representing different situations taken from real life (discrete case)
11.	Creating experimental functions, representing them and connecting them with different situations	Representing different situations taken from real life (continuous case)
Post-test (19 January 2016)		
Delayed test (23 May 2016)		

Table: A development program designed to prepare the function concept

The experiences of the improvement program based on the observation of students' work in the classes, the post-tests and the delayed tests (taking the results of the 6th form UA and HU students into consideration which is described in Chapter 4):

- The sources (function machine, process taken from real life) facilitated the familiarization with the constitutive parts of function.
- For some students the introduction of the “machine” was not enough to abstract from the model in other situations. It is necessary for them to try more of this kind of activity, which can be achieved by adding a so-called “rule-switch” to the “machine”. We can aim at a deeper understanding of the world of rules with this.
- The implementation of the inverse of the rule if it was not explicitly given caused difficulties for some students.
- The formation of the concept of the contextually embedded covariant quantities and the recognition of the relationship between them - thanks to the recognition of different function representations - was successful.
- Verbal argumentation for the recognised relationship also developed.
- The skill of switching between one representation method and the other developed.

- Half of the students couldn't represent the covariant quantities represented with table on an arrow diagram or graph in cases when several independent variables corresponded to one dependent variable.
- The relation recognition skills of covariant quantities hidden in different context improved by the program in those cases when the relationship was defined by a one-step rule.
- The targeted improvement program in the 6th form reached similar results to the HU students assessed in 2014, whose preparation work started in the 1st form of the elementary school.

An overview of H3. hypothesis:

The sources facilitated the familiarization with the constitutive parts of function concept, but for some students the abstraction from the experiences gained in the program to other situations was not successful. So, *H3.1.* can be only confirmed with the following modification: *The introduction of the sources (function machine, processes taken from real life) of the function concept in the 6th form contributes to the better understanding of the constitutive parts of the concept, but weaker students need more practice.*

The formation of the covariant quantities embedded in different contexts was facilitated by tried-and-tested activities. The representations of covariant quantities helped students to name and recognise the relationships between them and to switch from one way of representation to the other (*H3.2.* confirmed). The representation of the recognised relationship with tables contributed to the easier verbal expression of this relationship in the language of Mathematics, if the relationship was defined by a one-step rule.

When the covariant quantities and their relationship is hidden in textual context, the recognition and the verbal expression proved to be difficult, in particular when the relationship is defined by a two-step rule or the quantities are implicitly hidden in the text.

Regarding *K3.3.*, we can claim the following:

By introducing the components and different representations in the 6th form, the recognition of the relationship hidden in different contexts that can be defined with one-step rule, can be improved by targeted training.

However, the recognition and following of relationships that are defined with at least a two-step rule requires a more intensive long-term training.

At the end of the thesis we summarised the main results and experiences and presented some future implications:

- Further research on the formation process and the concept image in more Hungarian and Ukrainian schools and at different levels.
- The use of the presented experimental teaching method in more schools in Ukraine, with the necessary modifications and taking the experiences into consideration.
- Continue the experimental teaching in the 7th form with targeted training sessions of the introduction of the function concept. Developing further programs and piloting them in both, the Ukrainian and Hungarian schools.
- Comparing the concept formation process of the experimental groups with control groups.

IRODALOMJEGYZÉK

REFERENCES

1. Akkoç, H., Tall, D.O., The simplicity, complexity and complication of the function concept. *Proceedings of the 26th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2. Norwich, UK, 25–32, 2002.
2. Ambrus, A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Eötvös Kiadó, javított kiadás, 2004.
3. Ambrus, A., *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban*.
<http://rmpsz.ro/uploaded/tiny/files/magiszter/2003/osz/9.pdf>
4. Areti P., Paraskevi M., Andreas P., Teaching the concept of function: Definition and problem solving. Konrad Krainer; Nada Vondrova. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.440-445, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
5. Bruner, J. S., *Új utak az oktatás elméletéhez*. Gondolat, Budapest, 1974.
6. Chassapis, D., A framing of the world by mathematics: a study of word problems in greek primary school mathematics textbooks. In: U. Gellert, E. Jablonka & C. Morgan (eds.). *Proceedings of the Sixth International Mathematics Education and Society Conference*. Berlin: Freie Universität Berlin, 209-218, 2010.
7. Czeglédy, I., *A matematika tanításának pedagógiai-pszichológiai vonatkozásai*. Eszterházy Károly Főiskola, TAMOP 4.2.5., Eger, 12-39, 2011.
8. Czeglédy, I., Orosz, Gy., Szalontai, T., & Szilák, A., *Matematika tantárgypedagógia II. Főiskolai jegyzet*. Calibra Kiadó, Budapest, 93-105, 1994.
9. Csapó, B., Képesség. In: Z. Báthory, I. Falus (eds.). *Pedagógiai lexikon I-III*, Keraban Kiadó, Budapest, 1997, II/196.
10. Csépe, V., Györi, M., Ragó, A., *Általános pszichológia 1-3.-2.- Tanulás- emlékezés-tudás*. Osiris Kiadó, Budapest, 2007.
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_520_altaanospszichologia_2/index.html

11. Davindeko, S., Building the concept of function from students' everyday activities. *The Mathematics Teacher*, Vol. 90, No. 2, Feb97, 144-149, 1997.
12. Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., Reed, H., Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Volume 10, Issue 6, 1243–1267, 2012.
13. Dubinsky, E. & Harel, G., The nature of the process conception of function. In G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). DC: Mathematical Association of America, 1992.
14. Duval, R., Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Morelos, Mexico, 3-26, 1999.
15. Duval, R., The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16, 2002.
16. Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., Gagatsis, A., Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 5, 533–556, 2007.
17. Falus, I., A pedagógiai kutatás metodológiai kérdései. In I., Falus (Ed.), *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 3-17, 2004.
18. Herendiné Kónya, E., *A matematika tanítása alsó tagozaton*. Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest, 2013.
19. Herendiné Kónya, E., A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra*, 12(1-2), 51-61, 2003.
20. Herendiné Kónya, E., *Kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztési lehetőségei*. PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2007.
21. Isoda, M., The development of language about function: an application of van Hiele's levels. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 105-112., 1996.
22. Kelemen, R., *A matematikai szövegesfeladat-megoldó képesség vizsgálata többségi és tanulásban akadályozott 9-13 éves tanulók*

- körében. PhD értekezés Tézisei, 2010. http://www.edu.u-szeged.hu/phd/downloads/kelemen_tezis_hu.pdf
23. Kleiner I., Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, Vol. 20, No. 4, 282-300, 1989.
 24. Kwari, R., *An investigation into the development of the function concept through a problem-centered approach by form 1 pupils in Zimbabwe* (Master's thesis), 2007.
 25. Malle, G., Variable-Basisartikel mit Überlegungen zur elementaren Algebra. *Mathematik Lehren*, Vol. 15, 2-8, 1986.
 26. Norman, A., Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 215-232, 1992.
 27. Páles, Zs., *Bevezetés az analízisbe* (előadáskövető egyetemi jegyzet). Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet, 2013. <http://math.unideb.hu/media/pales-zsolt/anal.pdf>
 28. Rivera, F., *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Dordrecht: Springer, 2013.
 29. Sain, M., *Nincs királyi út*. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
 30. Sierpinska, A., On understanding the notion of function. In Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 25-58, 1992.
 31. Skemp, R.R., *A matematikatanulás pszichológiája* (S. Klein, ford.). Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005. (Eredeti könyv publikálva 1971-ben.)
 32. Stankov, G., *Konkrét és képi reprezentációk használata a hetedik osztályos algebratanításban*. PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2008.
 33. Szanyi, Gy., The investigation of students' skills in the process of function concept creation. *Teaching of Mathematics and Computer Science*, 13(2), 249-266, 2015.
 34. Szendrei, J., *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó, 2005.
 35. Székely, J., *Mérés-értékelés a pedagógiában*, Oktatási segédanyag, 2014.
 36. Szénássy, B., *Bolyai Farkas*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
 37. Tall, D., McGowen, M. & DeMarois, P., The Function machine as a cognitive root for the function concept. In. Fernandez, M.L (Ed.). *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting of the International*

- Group of the Psychology of mathematics education*: Vol. 1 (pp. 256-261). Tucson, Arizona U.S.A., 2000.
38. Thompson, P.W., Students, functions, and the undergraduate curriculum. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A., Kaput, J. (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education*, Vol. 4, 21–44, 1994.
 39. Török, T., *Relációk, függvények, sorozatok tanítása*, Tanítói kézikönyv, Általános iskola 1-4. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2012.
 40. Varga, T., *A matematika tanítása*. ELTE, Tankönyvkiadó Budapest, 1969.
 41. Varga, T., *Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematika tanításban. Korszerű módszerek és eszközök az iskolareform szolgálatában*. Tankönyvkiadó, Budapest, 83-101, 1966.
 42. Vinner, S., & HersHKowitz, R., Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Berkeley: University of California, Lawrence Hall of Science, 177-184, 1980.
 43. Vinner, S., Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305., 1983.
 44. Vinner, S., Dreyfus, T., Images and definitios for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366, 1989.
 45. Vinner, S., The function concept as a prototype for problems in mathematics learning, In: Harel, G., Dubinsky, E. (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemol-ogy and pedagogy*. DC: Mathematical Association of America, Washington, 195–214, 1992.
 46. Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J., Exploring young students' functional thinking. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 329-336. Ankara, Turkey: PME, 2011.

Előadások nemzetközi konferencián

- *A függvényfogalom kialakításának elemzése az ukrán és magyar tantervek, valamint tankönyvek tükrében (5-6.évfolyam)*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások, 2014. január 24.-26., Eger (Magyarország).
- *Tanulói képességek vizsgálata a függvényfogalom kialakítási folyamatában*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások, 2015. január 23.-25., Újvidék (Novi Sad) (Szerbia).
- *The study of the preparation of function concept using the van Hiele levels*, Ninth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 9), 4-8 February, 2015, Prague (Czech Republic).
- *A függvényfogalom bevezetésének hatása a szabályfelismerő és szabálykövető képességekre*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások, 2016. január 22-24., Pozsony (Szlovákia).
- *Word problems for the preparation of the function concept*, Children's Mathematical Education CME'16 – Wrocław Poland, July 18-21, 2016.
- *Általános iskolás tanulók fogalomképzetei a függvényről*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások, 2017. január 27-29., Budapest (Magyarország).

Előadások hazai konferencián

- *Fogalomképzetek és definíciók a függvényről*, Conference on Problem-based Learning in Engineering Education, 29 October, 2015, Debrecen.
- *Függvényfogalom előkészítése - egy kísérleti tanítás tapasztalatai*, Conference on Problem-based Learning in Engineering Education, 14 October, 2016, Debrecen.



Jelölt: Szanyi Gyöngyi
Neptun kód: AZ73GM
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10053254

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Magyar nyelvű könyvrészletek (1)

1. **Szanyi, G.**: Fogalomképzetek és definíciók a függvényről.
In: Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education.
Ed.: Imre Kocsis, [University of Debrecen Faculty of Engineering], Debrecen, 36-41, 2015.
ISBN: 9789634739166

Idégen nyelvű, külföldi könyvrészletek (2)

2. **Szanyi, G.**: Word problems for the preparation of the function concept.
In: Inquiry based mathematical education. Ed.: Bożena May-Tatsis, Marta Pytlak, Ewa Swoboda, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 179-188, 2016. ISBN: 9788379962921
3. **Szanyi, G.**: A study of the preparation of the function concept.
In: Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Eds.: Konrad Krainer, Nada Vondrová, Charles University in Prague, Faculty of Education ; ERME, Prague, Czech Republic, 481-487, 2015. ISBN: 9788072908448

Idégen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

4. **Szanyi, G.**: The impacts of the introduction of the function concept on students' skills.
Ann. Math. Inform. 46, 277-291, 2016. ISSN: 1787-5021.
5. **Szanyi, G.**: The investigation of students' skills in the process of function concept creation.
Teach. Math. Comp. Sci. 13 (2), 249-266, 2015. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2015.0401>





DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR



További közlemények

Magyar nyelvű közlemények külföldi folyóiratban (1)

6. **Szanyi, G.**: A szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlesztése a törtek tanítása során.
Limes, 2, 109-114, 2015. ISSN: 2411-4081.

A DEENK a Jelölt által az IDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2017.05.12.



Cím: 4032 Debrecen, Egyetem tér 1. • Postacím: 4010 Debrecen, Pf. 39. • Tel.: (52) 410-443
E-mail: publikaciosk@lib.unideb.hu • Honlap: www.lib.unideb.hu



Registry number: DEENK/130/2017.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Gyöngyi Szanyi
Neptun ID: AZ73GM
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10053254

List of publications related to the dissertation

Hungarian book chapters (1)

1. **Szanyi, G.**: Fogalomképzetek és definíciók a függvényről.
In: Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education.
Ed.: Imre Kocsis, [University of Debrecen Faculty of Engineering], Debrecen, 36-41, 2015.
ISBN: 9789634739166

Foreign language international book chapters (2)

2. **Szanyi, G.**: Word problems for the preparation of the function concept.
In: Inquiry based mathematical education. Ed.: Bożena May-Tatsis, Marta Pytlak, Ewa Swoboda, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 179-188, 2016. ISBN: 9788379962921
3. **Szanyi, G.**: A study of the preparation of the function concept.
In: Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Eds.: Konrad Krainer, Nada Vondrová, Charles University in Prague, Faculty of Education ; ERME, Prague, Czech Republic, 481-487, 2015. ISBN: 9788072908448

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (2)

4. **Szanyi, G.**: The impacts of the introduction of the function concept on students' skills.
Ann. Math. Inform. 46, 277-291, 2016. ISSN: 1787-5021.
5. **Szanyi, G.**: The investigation of students' skills in the process of function concept creation.
Teach. Math. Comp. Sci. 13 (2), 249-266, 2015. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2015.0401>





List of other publications

Hungarian scientific articles in international journals (1)

6. **Szanyi, G.**: A szabályfelismerő és szabálykövető képességek fejlesztése a törték tanítása során.
Limes, 2, 109-114, 2015. ISSN: 2411-4081.

The Candidate's publication data submitted to the IDEa Tudóster have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

12 May, 2017

